Основные комбинаторные конфигурации: размещения, сочетания, перестановки. Соединения с повторениями. Основные правила комбинаторики.

В простейших комбинаторных задачах требуется подсчитать число способов выбрать k элементов из n–элементного множества. То, что получается в результате выбора, называется *выборкой из n по k* или (n,k)–выборкой.

Понятие выборки отличается от понятия подмножества:

1. в выборках может допускаться повторение элементов.
2. выборки могут быть упорядоченными или неупорядоченными. Упорядоченность означает, что выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, считаются различными.

Пусть $M=\{1,2,...,n\}$ какое-либо конечное множество. *Соединением* элементов из множества *M* называется любой набор, составленный из элементов множества M.
Если в этом наборе какой-либо элемент встречается больше, чем один раз то говорят о *соединении с повторениями*; если же в наборе каждый элемент появляется лишь один раз, то говорят о *соединении без повторений*.

- *Перестановкой* элементов множества M называется всякое соединение элементов множества M, в котором обязательно присутствуют все элементы из M и в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом. При произвольном n количество P_n всевозможных перестановок множества $M=\{1,2,...,n\}$ равно

$$P_n=\prod_{i=0}^{n-1}(n-i)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=n!$$

$$P_0=1$$

- Всякое соединение из k элементов множества $M=\{1,2,...,n\}$, в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом, называется *размещением* из n элементов по k.

При n=k – это перестановка.
При n>k количество размещений из n по k равно: $A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Очевидно, что $A_n^n=P_n$ $\quad A_n^0=1$

- Всякое соединение из k элементов множества $M=\{1,2,...,n\}$, где $k\le n$ в котором порядок следования элементов друг за другом не учитывается, называется *сочетанием* из n по k. Количество сочетаний из n по k определяется следующей формулой:

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

- *Размещение с повторениями* из n элементов множества M по k - всякая конечная последовательность, состоящая из k членов данного множества M (при этом элементы в последовательности могут повторяться). Два размещения с повторениями считаются различными, если хотя бы на одном месте они имеют различные элементы множества M. Число k-размещений с повторениями равно $\overline{A}_n^k=n^k$

- Общая формулировка задач на *сочетания с повторениями*: имеются предметы n различных типов. Сколько k-комбинаций можно сделать из них, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации? Общее количество выборок в схеме выбора k элементов из n с возвращением и без учета порядка определяется формулой

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=C_{n+k-1}^{n-1}$$

- Задачи на *перестановки с повторениями*: Имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,…, n_k элементов k-го типа?

$$P(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\qquad где\quad n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

Очень многие комбинаторные задачи решаются применением трех простых правил: **равенства, суммы и произведения**.

Правило равенства. Если между конечными множествами *A* и *B* есть взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$

Правило суммы. Если *A* и *B* – конечные множества и $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$

Правило произведения. Для любых конечных множеств *A* и *B* имеет место равенство : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Первые два правила очевидны, третье следует из того, что при $|B| = b$ каждый элемент множества *A* образует *b* пар с различными элементами множества *B*, поэтому, если $|A| = a$, то всего будет ab пар.

Правила суммы и произведения обобщаются на случай любого числа слагаемых или сомножителей.

Для правила суммы обобщение очевидно: мощность объединения любого числа попарно непересекающихся множеств равна сумме их мощностей.

Иногда множество, из которого выбирается x_i, зависит от того, какие элементы были выбраны в качестве $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, но число элементов в этом множестве, т.е. число вариантов для выбора остается постоянным. В этом случае правило произведения также применимо, но в более общей формулировке.

<u>Общее правило произведения</u>. Пусть упорядоченный набор $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ формируется в результате последовательного выбора элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем для любого $i = 1, \dots, n$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ элемент x_i можно выбрать k_i способами. Тогда весь набор может быть выбран $k_1 k_2 \dots k_n$ способами.