Сеть. Поток в сети. Задача о максимальном потоке в сети. Алгоритм нахождения максимального потока.

Сетью называется ориентированный граф G=(V,E), каждому ребру $(u,v)\in E$ которого поставлено в соответствие число $c(u,v) \geq 0$, называемое **пропускной способностью** ребра. В случае $(u,v)\notin E$, полагаем $c(u,v)=0$.
В графе выделены 2 вершины: источник s и сток t. Граф связен, т.е. $|E| \geq |V| - 1$.
Пусть дана сеть G=(V,E), пропускная способность которой задаётся функцией c.
Потоком в сети G назовём функцию $f : V \times V \to R$, обладающую следующими свойствами:

1. Ограничение, связанное с пропускной способностью: $f(u,v) \leq c(u,v)$ для всех u,v изV;
2. Кососимметричность: $f(u,v) = -f(v,u)$ для всех u,v из V;
3. Сохранение потока: $\sum_{v\in V} f(u,v) = 0$ для всех u из V - {s,t}.

Величина потока определяется как сумма потоков по всем рёбрам выходящим из истока.

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v)$$

Дан ориентированный граф.
Будем рассматривать его как сеть труб, по которым некоторое вещество движется от источника к стоку. Веса на рёбрах - пропускная способность трубы.
Задача о максимальном потоке:
Найти максимально возможную скорость производства (и потребления) вещества, при которой его ещё можно доставить от истока к стоку при данных пропускных способностях труб. Или - для данной сети G с истоком s и стоком t найти поток максимальной величины.
Вершину сети v , для которой $deg^-(v)>0$ (полустепень исхода) и $deg^+(v)=0$ (полустепень захода) будем называть **источником**, а вершину w, для которой $deg^+(w)>0$ и $deg^-(w)=0$ – **стоком**.
Поток называется **максимальным**, если он имеет наибольшую величину (среди всех потоков через данную сеть).
Назовём **разрезом** сети G=(V, E) разбиение множества V на две части S и T=V \ S, для которых $s\in S$ и $t\in T$.
Пропускной способностью разреза (S,T) называют сумму пропускных способностей, пересекающих разрез рёбер.
Для заданного потока f **величина потока через разрез** (S,T) определяется как сумма f(S,T) по пересекающим разрез рёбрам.
Минимальным разрезом называется разрез наименьшей пропускной способности (среди всех разрезов сети).
Теорема Форда-Фалкерсона:
Во всякой сети величина максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.

Идея алгоритма состоит в нахождении сквозных путей с положительными потоками от источника к стоку.
Рассмотрим ребро (i,j) , с начальной пропускной способностью $(\overline{C_{ij}}, \overline{C_{ji}})$.
В процессе выполнения алгоритма части этих пропускных способностей «забираются» потоками, проходящими через данное ребро. В результате каждое ребро будет иметь остаточную пропускную способность.
(c_{ij}, c_{ji}) – остаточная пропускная способность .
Сеть, где все рёбра имеют остаточную пропускную способность, называется остаточной.
Для произвольного узла j, получающего поток от узла i, определим метку $[a_j, i]$, где a_j – величина потока между узлами.
<u>Алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока</u>

1. Для всех рёбер (i,j) положить остаточную пропускную способность равной первоначальной: $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{C_{ij}}, \overline{C_{ji}})$

Назначим $a_1=\infty$ и пометим узел 1 меткой $[\infty ,-]$.
Полагаем i=1.

2. Определить множество S_i, как множество узлов j, в которые можно перейти из i по ребру с положительной остаточной пропускной способностью.

Если $S_i \neq \varnothing$, выполняем шаг 3, иначе шаг 4.

3. В множестве S_i находим узел k, такой, что $c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$.

Положим $a_k=c_{ik}$ и пометим узел k меткой $[a_k,i]$.
Если последней меткой помечен узел стока (k=n), сквозной путь найден, переходим к шагу 5.
Иначе полагаем i=k и возвращаемся к шагу 2.

4. **(Откат назад).** Если i=1, сквозной путь невозможен, переходим к шагу 6.

Если $i \neq 1$, находим помеченный узел r, непосредственно предшествующий узлу i, и удаляем узел i из множества узлов, смежных с узлом r.
Полагаем i=r и возвращаемся к шагу 2.

5. **(Определение остаточной сети).**

Обозначим через $N_p = \{1; k_1, k_2, ..., n\}$ множество узлов, через которые проходит p-й найденный сквозной путь от источника к стоку.
Тогда максимальный поток, проходящий по этому пути равен: $f_p = \min \{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_n\}$

Остаточные пропускные способности рёбер, составляющих сквозной путь, уменьшаются на f_p в направлении движения потока и увеличиваются на f_p в противоположном направлении.
Для ребра (i,j), входящего в сквозной путь, текущие остаточные стоимости будут равны:

a) $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$, если поток $i \to j$;
b) $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$, если поток $j \to i$.

Восстанавливаем все узлы, удалённые на шаге 4. Полагаем i=1. Возвращаемся к шагу 2.

6. (Решение).

a) При m найденных сквозных путях максимальный поток вычисляется по формуле:

$$F = f_1 + f_2 + ... + f_m$$

b) Имея значения начальных $(\overline{C_{ij}}, \overline{C_{ji}})$ и конечных (c_{ij}, c_{ji}) пропускных способностей ребра (i,j) вычисляем оптимальный поток через это ребро.

Положим

$$(\alpha, \beta) = (\overline{C_{ij}} - c_{ij}, \overline{C_{ji}} - c_{ij})$$

Если $\alpha>0$, то поток, проходящий через ребро (i,j), равен α.

Если $\beta>0$, то поток равен β.

Случай, когда одновременно $\alpha>0$ и $\beta>0$ невозможен.