Основные понятия теории графов: граф, способы задания, маршруты, связность, расстояния в графах, степени вершины.

Граф G задаётся множеством точек или *вершин* $x_1, x_2, \dots, x_n$ (которое обозначается через X) и множеством линий или *ребер* $a_1, a_2, \dots, a_m$ (которое обозначается через A), соединяющих между собой все или часть этих точек. Таким образом, граф G полностью задаётся (и обозначается) парой (X, A).

Если ребра из множества A ориентированы, то они называются *дугами*, и граф с такими ребрами называется *ориентированным* графом. Если ребра не имеют ориентации, то граф называется неориентированным.

Чаще употребляемое описание ориентированного графа G состоит в задании множества вершин X и *соответствия* Г, которое показывает, как между собой связаны вершины. Соответствие Г называется *отображением* множества X в X, а граф в этом случае обозначается парой G = (X, Г)

В случае неориентированного графа или графа, содержащего и дуги, и неориентированные ребра, предполагается, что соответствие Г задаёт такой эквивалентный ориентированный граф, который получается из исходного графа заменой каждого неориентированного ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же самые вершины.

Способы задания графов:

1. Явное задание графа как алгебраической системы.
2. Геометрический
3. Матрица смежности
4. Матрица инцидентности

Для алгебраического задания графов удобно использовать следующие матрицы:

– Пусть дан граф G, его *матрица смежности* обозначается через $A = [a_{ij}]$ и определяется следующим образом:

  $a_{ij} = 1$ если в G существует дуга (x_i, x_j)
  $a_{ij} = 0$ если в G нет дуги (x_i, x_j)

– Пусть дан граф G с n вершинами и m дугами. *Матрица инциденций* графа G обозначается $B=[b_{ij}]$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

  $b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j
  $b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j
  $b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j

Поскольку каждая дуга индидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный –1, либо все элементы столбца равны 0.

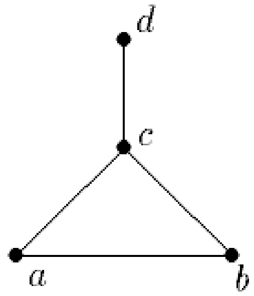
Если G – неориентированный граф, то его матрица инциденций определяется также как и выше, за исключением того, что все элементы, равные –1, заменяются на +1.

Рассмотрим различные способы задания для одного и того же графа.

1. <{*a*,*b*,*c*,*d*},{*u*,*v*,*w*,*x*}; {(*u*,*a*),(*u*,*b*),(*v*,*b*),(*v*,*c*),(*w*,*c*),(*w*,*a*),(*x*,*c*), (*x*,*d*)}>. Так как мы рассматриваем только простые графы, граф нам проще определять как модель, носителем которой является множество вершин, а отношение – бинарное отношение смежности вершин. Тогда данный граф запишется как <{*a*,*b*,*c*,*d*}; {(*a*,*b*), (*b*,*a*),(*b*,*c*),(*c*,*b*),(*a*,*c*),(*c*,*a*),(*c*,*d*),(*d*,*c*)}>. В таком представлении ребру соответствуют две пары вершин (v_1, v_2) и (v_2, v_1), инцидентных данному ребру. Чтобы задать такое представление, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром. Для данного графа рёбра

задаются множеством {{*a,b*},{*b,c*},{*a,c*},{*c,d*}} и граф мы будем записывать как пару (*V,E*), где *V* – множество вершин, а *E* – множество рёбер.

2. Геометрический



3. Матрица смежности

	a	b	c	d
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
d	0	0	1	0

4. Матрица инциденций

	u	v	w	x
D	1	0	0	0
C	1	1	1	0
B	0	1	0	1
A	0	0	1	1

Маршруты. Связность.

Маршрут – это последовательность рёбер $e_1,..,e_m$ такая, что e_i,e_{i+1} имеют общую вершину. Число рёбер называется *длиной маршрута.*

Пусть G –неориентированный граф.

Маршрут называется цепью, если все рёбра в нём различны.

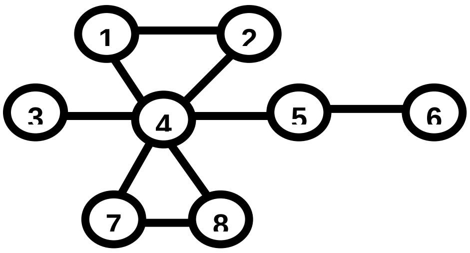
Если ни одна из вершин не появляется более 1 раза, то маршрут называется простой цепью.

Маршрут называется циклическим, если первая вершина в нём равна последней.

Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь – простым циклом.

Неорграф без циклов называется ациклическим.

Минимальная из длин циклов неорграфа называется обхватом.



ПРИМЕР:

(1,2), (1,2,4,7), (3,4,5,6) – простые цепи
(1,2,4,7,8,4) – цепь не простая
(1,2,4,7,8,4,2) – маршрут, не являющийся цепью
(1,2,4,7,8,4,1) – цикл не простой
(1,2,4,1) – простой цикл
Обхват графа =3

Пусть G – ориентированный граф.

Путь – маршрут, у которого все дуги различны.

Ориентированной цепью называется такой путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.

*Простой ориентированной цепь***ю** называется такой путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза.

Если в цикле каждая вершина, кроме первой и последней, встречается не более одного раза – то такой цикл называется *контуром*.

<u>Неориентированный граф</u> называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.
<u>Орграф</u> называется *связным*, если соответствующий ему неорграф тоже является связным.
Орграф называется *сильно связным*, если для каждой пары различных вершин a и b существуют (a,b)-путь и (b,a) – путь.
Любой связный неорграф является сильно связным.
Всякий максимальный по включению связный подграф данного графа называется его *компонентой связности.*
Пусть G=<M,R> - связный неорграф, a,b – две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (a,b)- маршрута называется *расстоянием* между вершинами a и b и обозначается через ρ(a,b). Положим ρ(a,a)=0. Тогда введённое таким образом расстояние удовлетворяет следующим аксиомам метрики:

- $\rho(a,b)\geq 0$;
- $\rho(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$;
- $\rho(a,b)= \rho(b,a)$;
- $\rho(a,b)\leq \rho(a,c)+ \rho(c,b)$.

Если $M=\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$, то матрица $P=(p_{ij})$, в которой $p_{ij}= \rho(a_i, a_j)$, называется *матрицей расстояний*.
Для фиксированной вершины a величина $e(a) = max\{ \rho(a,b) | b \in M$ называется *эксцентриситетом* вершины a. Эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удалённой от неё.
Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается через d(G): $d(G) = max\{ e(a) | a \in M \}$. Вершина называется *периферийной*, если d(G)=e(a).
Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его *радиусом* и обозначается через r(G): $r(G) = min\{ e(a) | a \in M \}$. Вершина a называется *центральной*, если e(a)=r(G).
Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*.
Степенью (deg v) или *валентностью* вершины v неориентированного графа G называется число рёбер, инцидентных вершине v.
Вершина степени 0 называется *изолированной*.
Вершина степени 1 называется *концевой* или *висячей*.
<u>Пусть G – ориентированный граф.</u>
Полустепенью захода ($\deg^+ v$) вершины v называется число дуг, входящих в вершину v.
Полустепенью исхода ($\deg^- v$) вершины v называется число дуг, выходящих из вершины v.
Справедливо соотношение: $\deg v = \deg^+ v + \deg^- v$

<u>Лемма :</u>
Сумма степеней всех вершин графа является чётным числом и равна удвоенному числу рёбер.