Методы решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (сокращенно ОДУ) первого порядка

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in [x_0, b] \tag{6.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{6.2}$$

где $f(x, y)$ - некоторая заданная, в общем случае, нелинейная функция двух переменных.

Будем считать, что для данной задачи (6.1)-(6.2) называемой начальной задачей или задачей Коши, обеспечиваются существование и единственность на отрезке $[x_0, b]$ ее решения $y = y(x)$.

Метод Эйлера – разные подходы к построению

Учитывая ключевую позицию, которую занимает метод Эйлера в теории численных методов ОДУ, рассмотрим несколько способов его вывода. Будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом $h = \dfrac{b - x_0}{n}$, расчетными точками (узлами) служат $x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ промежутка $[x_0, b]$ и целью является построение таблицы

x	x_0	x_1	…	$x_n = b$
y	y_0	y_1	…	$y_n \approx y(b)$

приближенных значений y_i решения $y = y(x)$ задачи (6.1)-(6.2) в расчетных точках x_i.

Геометрический способ.

В точке x_0 известно и значение решения $y(x_0) = y_0$ (согласно (6.2)), и значение его производной $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ (согласно (6.1)), поэтому можно записать уравнение касательной к графику искомой функции $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \tag{6.3}$$

При достаточно малом шаге h ордината

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{6.3'}$$

этой касательной, полученная подстановкой в правую часть (6.3) значения $x_1 = x_0 + h$, по непрерывности должна мало отличаться от ординаты $y(x_1)$ решения $y(x)$ задачи (6.1)-(6.2).

Следовательно, точка (x_1, y_1) пересечения касательной (6.3) с прямой $x = x_1$ может быть приближенно принята за новую начальную точку. Через эту точку снова проведем прямую

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

которая уже приближенно отражает поведение касательной к $y = y(x)$ в точке $(x_1, y(x_1))$.

Подставляя сюда $\boldsymbol{x = x_2}$ $\boldsymbol{(x_2 = x_1 + h)}$, иначе, пересекая эту «касательную» прямой $x = x_2$, получим приближенные значения $y(x_2)$ значением $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ и т. д.

В итоге формулы этого процесса, определяются формулой

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (6.4)$$

и называются *методом Эйлера.* График решения $y = y(x)$ данной задачи Коши (6.1)-(6.2) приближенно представляется ломаной, составленной из отрезков касательных (рис. 1), откуда происходит другое название метода – *метод ломаных* (6.4).

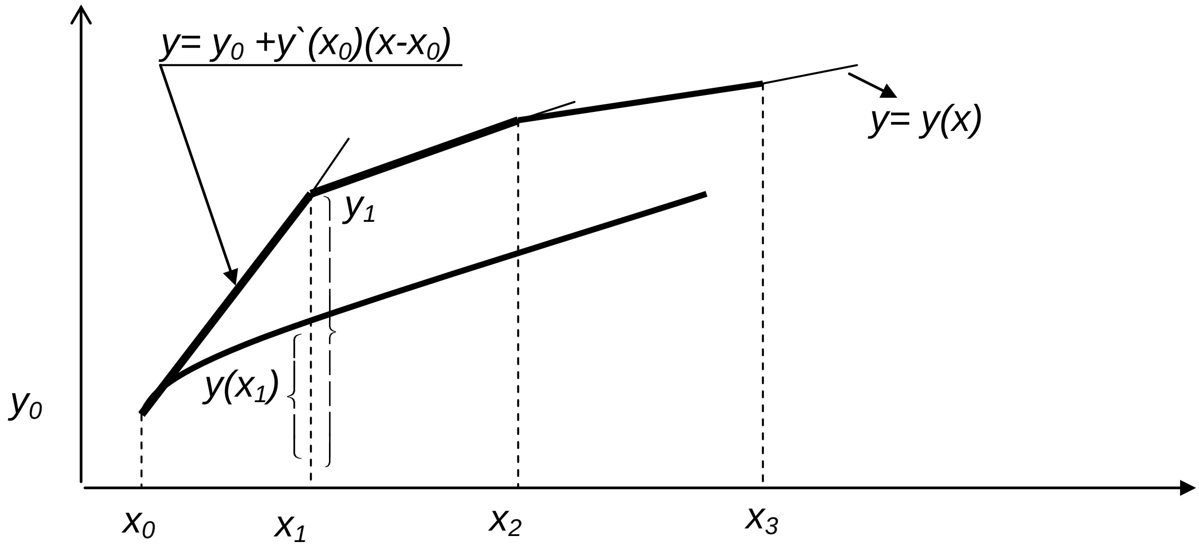

Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Применение формулы Тейлора.

Линеаризуя решение в окрестности начальной точки по формуле Тейлора, имеем

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(\zeta)}{2}(x - x_0)^2$$

Отсюда при $x = x_1$ получаем

$$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{y''(\zeta_1)}{2}h^2 \qquad (6.5)$$

Точное равенство (6.5), переписанное в виде

$$y(x_1) = y_1 + r_1(h)$$

дает одновременно как саму формулу Эйлера для вычисления значения $y_1 \approx y(x_1)$, так и ее остаточный член

$$r_1(h) = \frac{y''(\xi_1)}{2} h^2, \tag{6.6}$$

где ξ_1 - некоторая точка интервала (x_0, x_1).

Остаточный член (6.6) характеризует локальную (или, иначе говоря, шаговую) ошибку метода Эйлера, т.е. ошибку, совершаемую на одном шаге.

За n шагов, т. е. в точке b, образуется глобальная ошибка; Известный факт: *порядок глобальной ошибки (относительно шага) на единицу ниже, чем порядок локальной ошибки, а порядком глобальной ошибки и определяется порядок соответствующего численного процесса задача Коши.*

Локальная ошибка метода Эйлера - $O(h^2)$, глобальная - $O(h)$, т.е. метод Эйлера относится к *методам первого порядка*.

Разностный способ.

Рассматривая уравнение (6.1) в точке (x_0), с учетом (6.2) имеем равенство

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Применяя к его левой части аппроксимацию производной правым разностным отношением первого порядка точности

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} - \frac{y''(\xi_1)}{2} h,$$

получаем

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = f(x_0, y_0) + \frac{y''(\xi_1)}{2}h$$, что идентично

равенству (6.5).

Квадратурный способ.

Начальную задачу для ОДУ (6.1)-(6.2) можно заменить эквивалентным интегральным уравнением.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \tag{6.7}$$

При $x = x_1$ из него получится равенство

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\,dx \tag{6.8}$$

Применение к интегралу в правой части равенства (6.8) формулы левых прямоугольников (5.5) дает приближенную формулу

$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0)$, правая часть которой, очевидно, совпадает с выражением (6.3) для подсчета значений y_1.

В общем случае расчетная формула (6.4) метода Эйлера получается численным интегрированием посредством простейшей формулы левых прямоугольников в равенстве

$$y(x_{i+1}) - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx \tag{6.9}$$

в предположении, что на каждом i - том шаге в роли начальной точки (x_0, y_0) выступает точка (x_i, y_i).

Зная точность используемой в (6.9) квадратурной формулы, можно прийти к тому же выражению локальной ошибки метода Эйлера, что и при других способах его построения.

Модификации метода Эйлера

Применение к интегральному равенству (6.9) других простейших квадратурных формул будет порождать новые методы численного интегрирования Задачи Коши (6.1)-(6.2).

Так, если в (6.9) использовать простейшую квадратурную формулу правых прямоугольников (5.6), придем к методу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, n \tag{6.10}$$

Этот метод называется *неявным или обратным методом Эйлера,* поскольку для вычисления неизвестного значения $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ по известному значению $y_i \approx y(x_i)$ требуется решать уравнение, в общем случае нелинейное.

Применение к интегралу в (6.9) простейшей квадратурной формулы трапеций (5.) приводит тоже к неявному методу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, \ldots, n, \tag{6.11}$$

который будем называть *методом трапеций*. Квадратурная формула трапеций на порядок точнее формул левых и правых прямоугольников (см. Глава 1). Отсюда вытекает более высокий (на единицу) порядок точности метода (6.11) по сравнению с явным и неявным методами Эйлера (6.4) и (6.10), т.е. *метод трапеций* (6.11) – это метод *второго порядка*.

Некоторый интерес представляет собой совместное применение явного метода Эйлера и неявного метода трапеций.

По форме равенство (6.11) представляет собой задачу о неподвижной точке относительно неизвестного значения y_{i+1}. Поэтому, если в правую часть (6.11) подставить хорошее начальное приближение y_{i+1}^{0}, подсчитываемое по формуле (6.4), то тогда само это равенство можно считать шагом метода простых итераций для уточнения этого значения. Таким образом, получаем метод

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\ f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i))],\quad i = 0,\dots,n$$

, (6.12)

который называют методом *Хойна* (*методом Эйлера-Коши*) или методом с пересчетом.

Метод Эйлера-Коши можно записать в два этапа:

1–ый этап - по формуле левых прямоугольников (метод Элера):

$$\boldsymbol{\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}$$

2-ой этап – по формуле трапеций:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\ f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \tilde{y}_{i+1}],\quad i = 0,\dots,n}$$

Чтобы получить следующую модификацию метода Эйлера, интеграл в правой части заменим по формуле средних прямоугольников (5.6):

$$\begin{aligned} y_{j+\frac{1}{2}} &= y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) \\ y_{j+1} &= y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \qquad (6.14)$$

этот метод будем называть *методом Эйлера на полуцелой сетке*.

Квадратурная формула средних прямоугольников имеет тот же порядок, что и квадратурная формула трапеций, так что *метод Эйлера на полуцелой сетке* тоже является методом второго порядка.

Полученные методы относятся к семейству методов Рунге-Кутта.

Методы Рунге – Кутта

3. Запишем формулы метода Рунге-Кутта 4 –го порядка:

$$\kappa_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$\kappa_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h_1}{2}, y_i + \frac{\kappa_1}{2});$$

$$\kappa_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h_1}{2}, y_i + \frac{\kappa_2}{2}); \qquad (6.17)$$

$$\kappa_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + \kappa_3);$$

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Это один из точных методов, порядок метода равен $s = 4$, погрешность метода - $\varphi(h) \approx O(h^5)$, и он носит название *метод Рунге – Кутта*.