Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП):

(Определение ЛП (ЗЛП))

Математическая модель ЗЛП:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min),$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2,$$

......

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m,$$

$$x_j \geq 0,\ (j \in 1:n)$$

Свойства ЗЛП

Теорема 1. ***Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования (ЗЛП) выпуклое.***

//Определение

*Множество точек G называется **выпуклым**, если наряду с двумя произвольными точками A1, A2, принадлежащими данному множеству, их выпуклая линейная комбинация так же принадлежит множеству: l A1 + (1 – l)A2 Î G, l Î [0; 1].*

*Среди точек множества можно выделить **внутренние, граничные и угловые**.*

*Точку Ао выпуклого множества G называют **внутренней**, если в некоторой ее окрестности содержатся точки только данного множества.*

*Точку Ао выпуклого множества G называют **угловой**, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком лежащего в G.*

*Точку Ао выпуклого множества G называют **граничной**, если в любой ее окрестности содержатся как точки данного множества, так и не принадлежащие ему.*

Понятие выпуклой линейной комбинации (ВЛК) точек

Опр1. Точка А является ***ВЛК*** точек A_1, A_2 ,если $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ $(1 \leq j \leq 2)$

(Опр2. ***А – ВЛК*** точек $A_1, A_2, .., A_n$, ***если*** $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$,

$\lambda_j \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$

$(1 \leq j \leq n)$)

Теорема 2.

I. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то линейная целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многоугольника решений.

II. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более, чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся ВЛК этих точек.

Теорема 3.

Каждому допустимому базисному решению ЗЛП соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

*//Из курса линейной алгебры, известно, что совместная система из m уравнений с n переменными имеет единственное решение, если ранги основной и расширенной матриц равны числу переменных задачи, и бесконечно много решений, если ранги меньше числа неизвестных. Во втором случае переменные задачи подразделяют на основные (базисные) и не основные (свободные). Множество решений СЛАУ ищется на основе варьирования значений свободных переменных. При решении задач линейного программирования интерес представляют решения при нулевых свободных переменных. Такие решения называют базисными. Базисные решения, в свою очередь, подразделяют на **допустимые**, не допустимые, **вырожденные**.*

Допустимые *базисные решения должны содержать только неотрицательные компоненты.*

Вырожденные *базисные решения кроме нулевых свободных переменных содержат хотя бы одну основную переменную=0.*

Максимально возможное количество базисных решений совместной системы из m уравнений с n переменными (ранг r = m) определяется числом сочетаний C = n! / m!(n-m)!

Основная ЗЛП неразрешима, если:

1) *уравнения (II) не совместны;*
2) *уравнения (II) совместны, но решения не удовлетворяют условиям неотрицательности;*
3) *уравнения (II) совместны, существуют допустимые решения, но среди них нет оптимальных.*

Замена неравенств уравнениями

Для перехода от неравенств к уравнениям вводятся дополнительные переменные xn+ i >= 0.

Если неравенство имеет знак «≤», то соот. дополнительная переменная вводится в левую часть со знаком «+».

Если неравенство имеет знак «<=», то со знаком «– ».

Геометрическая интерпретация свойств ЗЛП

Пример

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

ОДР – выпуклый четырехугольник. Градиент целевой функции gradF = {3;3}.
При решении симплексным методом на некотором *к*-ом шаге получаем результат:

базисные переменные – x_1, x_2, x_5

свободные переменные – x_3, x_4.

Выражения базисных переменных через свободные:

$x_1 = 3 - (1/3)x_3 + (1/3)x_4,$

$x_2 = 5 - (2/3)x_3 - (1/3)x_4,$

$x_5 = 9 - x_3 - x_4.$

Соответствующее базисное решение $X_к = (3; 5; 0; 0; 9)$

отсутствует одна из переменных, в то время как критерий оптимальности выполнен ->
Альтернативный max в точках отрезка $X^* \in [AB]$,
A (3; 5), B (6;2), F(X*) = 24.
Соответствующие базисные решения ЗЛП:
$X_к=(3; 5; 0; 0; 9)$, $X_{к+1} =(6;2;0;9; 0)$,
$X^* = \alpha X_к + (1-\alpha)X_{к+1}$
$0 \le \alpha \le 1$
Fmin (0.5; 0) = 1.5
Соответствующее базисное решение $X_{к+2} = (0.5;0; 7.5; 0; 1.5)$