ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Задаче линейного программирования (ЗЛП) соответствует сопряжённая по отношению к исходной *двойственная*. для проведения качественных исследований ЗЛП

Виды математических моделей двойственных задач

Несимметричные задачи

Исходная-I

$Z=CX\rightarrow min$

$AX = A_0$

$X \geq 0$

*Двойственная-I**

$F=YA_0\rightarrow max$

$YA \leq C$

II

$Z=CX\rightarrow max$

$AX = A_0$

$X \geq 0$

*II**

$F=YA_0\rightarrow min$

$YA \geq C$

Симметричные задачи

III

$Z=CX\rightarrow min$

$AX \geq A_0$

$X \geq 0$

*III**

$F=YA_0\rightarrow max$

$YA \leq C$

$Y \geq 0$

IV

$Z=CX\rightarrow max$

$AX \leq A_0$

$X \geq 0$

*IV**

$F=YA_0\rightarrow min$

$YA \geq C$

$Y \geq 0$

(УСЛОВИЯ I и II, III и IVможно объединить)

//

Первая теорема двойственности (основная)

Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны.

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы

Экономическая интерпретация

F = c1x1 + c2x2 + …cnxn - > max

a11 x1 + a12 x2 + …a1n xn <= b1

..

am1 x1 + am2 x2 + … amn xn <= bm

xi >= 0

x – количество продукции

c – цены на сбыт

aij – кол-во ресурсов iго типа на производства продукта j

bi – ограничение по I ресурсу на складе

ДВОЙСТВЕННАЯ

Z = b1 y1 + b2 y2 + ..bm ym -> min

a11 y1 + a21 y2 + .. am1 ym >= c1

…

a1n y1 + a2n y2 + .. amn ym >= cn

yi >= 0

y- набор цен на ресурсы

Z – общие затраты на ресурсы

C – прибыль от реализации продукта

Затраты на ресурсы не меньше прибыли от реализации

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ

1. 1 -> max; 2->min
2. Онраничения: max <=; min >=
3. Ограничение 1 = переменная в 2
4. Если огр. В 1 – неравенство, то пер-ая в 2 >=0
5. A = A^T
6. C –> B

СООТ-Е ПЕРЕМЕННЫХ

Для xi i=1..2 n=2;- базисных пер-х m=6 - ограничений

x1 -> y5; x2->y6; x3 -> y1;…

$$x_j = y_{m+j}\ ; \quad x_{n+i}=y_i; \quad \textbf{Если xj >0 ym+j = 0 и наоборот.}$$

Вторая теорема двойственности ***Компоненты оптимального плана двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через свободные переменные ее оптимального решения.***

Z = 24 – 4/5 x3 + 2/5 x4

Z(X) = 24 //extr

X=(6, 4, 0, 0, 1, 3) //базисн. Решение для него

X=(1, 2, 3, 4, 5, 6) //IDs

F(Y) = 24 //extr

Y=(3,4,5,6,1,2) //IDs соответствие с первым

Y=(3,4,0,0,0,0) //зануление тех, которые <>0 в первом

Y1 = 3 = |-4/5| = 4/5

Y2 = 4=|2/5| = 2/5

Y=(4/5, 2/5, 0 ,0 ,0 ,0) //базисное для двойственной

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ПО РЕШЕНИЮ ИСХОДНОЙ.

Пример 1

Исходная ЗЛП:

$Z = 2x_1 + 7x_2 \to max$

$-2x_1 + 3x_2 \le 14,$

$x_1 + x_2 \le 8,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Двойственная:

$F = 14y_1 + 8y_2 \to min$

$-2y_1 + y_2 \ge 2,$

$3y_1 + y_2 \ge 7,$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$

Ответ: $Z\ max(2, 6) = 46.$

$F\ min(1, 4) = 46$

Пример 2

$Z = -2x_1 - 3x_2 \to min$

$-4x_1 + 2x_2 \ge 4,$

$x_1 + x_2 \ge 6,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Двойственная II:

$F = 4y_1 + 6y_2 \to max$

$-4y_1 + y_2 \le -2,$

$2y_1 + y_2 \le -3,$

$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$

Ответ: $Z\ min = \infty.$

ОДР II - Ø

Теорема ***Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной взаимно двойственной задачи соответствуют нулевые компоненты другой задачи, т.е. если*** $x_j^* > 0$, ***то*** $y_{m+j}^* = 0$, ***если*** $x_{n+i}^* > 0$, ***то*** $y_i^* = 0$ ***и аналогично, если***
$y_i^* > 0$, ***то*** $x_{n+i}^* = 0$, ***если***
$y_{m+j}^* > 0$, ***то*** $x_j^* = 0$.