МОДЕЛИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Рассмотрим ЗНП:

$\boldsymbol{Z = f(X) \to extr,}$

$\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),}$

$\boldsymbol{g_i(X) \le b_i,\ 1 \le i \le m}$

Опр. Функция ***f(X),*** заданная на выпуклом множестве, называется ***выпуклой (вогнутой)***, если для $\forall$ двух точек $\boldsymbol{X^{(1)}}$ ***и*** $\boldsymbol{X^{(2)}}$ из данного множества и $\forall$ $\boldsymbol{0 \le \lambda \le 1}$ выполняется соотношение ***(1):***

$$f\left[\lambda X^{(2)} + (1-\lambda)X^{(1)}\right] \le \lambda f\left(X^{(2)}\right) + (1-\lambda) f(X^{(1)})$$

$(f[\lambda X^{(2)} + (1-\lambda)X^{(1)}] \ge \lambda f(X^{(2)}) + (1-\lambda) f(X^{(1)}))$ (2)

Неравенства **(1,2)** означают, что отрезок, соединяющий точки ($\boldsymbol{X^{(1)}, f(X^{(1)})}$) и ($\boldsymbol{X^{(2)}, f(X^{(2)})}$) *расположен не ниже (не выше) графика функции на этом участке.*

Свойства выпуклых и вогнутых функций:

Свойство 1 ***Если f(X) – выпуклая (вогнутая)функция, то - f(X) – вогнутая (выпуклая) функция.***

Свойство 2: ***Если f(X) – выпуклая функция, то множество всех точек, удовлетворяющих условиям:***
$\boldsymbol{f(X) \le b,}$
$\boldsymbol{X \ge 0}$***, выпукло (если оно непусто).***

Если функция непрерывна вместе с частными производными первого порядка, то справедливы свойства:

Теорема1: **Пусть f(X) - выпуклая (вогнутая) функция, заданная на замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве; тогда любой локальный min (max) целевой функции является и глобальным.**

Следствие1: **Если глобальный min(max) достигается в двух различных точках, то он достигается и в любой точке отрезка, соединяющего данные точки.**

Следствие2: **Если f(X) – строго выпуклая (вогнутая) функция, то её глобальный min(max) на выпуклом множестве достигается в единственной точке.**

Теорема2: **Пусть f(X) – выпуклая (вогнутая) функция, заданная на выпуклом множестве и $\nabla f(X^{(0)}) = 0$. Тогда $X^{(0)}$ точка глобального min(max).**

Критерий Сильвестра

Дважды дифференцируемая функция f(X) является выпуклой (вогнутой), если матрица Гессе положительно определенная (отрицательно определенная). Элементы матрицы – частные производные по соответствующим переменным:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Пример.

Показать, что заданная функция является выпуклой (вогнутой)

$\boldsymbol{Z = 2x^2 + y^2 - xy + 5x - 6y + 8.}$

Решение:

$\boldsymbol{Z'_x = 4x - y + 5,\quad Z'_y = -x + 2y - 6,\ Z''_{xx} = 4,\ Z''_{yy} = 2,\ Z''_{xy} = -1.\ \Delta_1 = Z''_{xx} = 4,}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Таким образом, все главные миноры матрицы Гессе строго положительны, функция Z является строго выпуклой при $\forall$ x, y. положительная (отрицательная) **определенность матрицы Гессе в стационарной точке является достаточным условием существования в этой точке минимума (максимума).**

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Главные миноры равны соответственно: -2, 4, -6. Следовательно, матрица отрицательно определенная, а точка – max.

В общем случае, когда матрица Гессе неопределенная, стационарная точка является седловой; когда матрица полуопределенная, то для установления характера экстремума необходимы дополнительные исследования.

Задача выпуклого программирования.

- Задача выпуклого программирования (ВП) состоит в отыскании такого решения, при котором выпуклая функция Z достигает минимального значения, или вогнутая функция Z достигает максимального значения.
- Всякая **ЗЛП является частным случаем** задачи ВП.
- В общем случае задачи ВП являются задачами нелинейного программирования.
- Выделение задач ВП в специальный класс объясняется экстремальными свойствами выпуклых функций: всякий локальный минимум выпуклой функции (локальный максимум вогнутой функции) является одновременно и глобальным

Дополнительно:

// Определение выпуклого множества точек.

// Понятие локального и глобального экстремума.