7. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

Дифференциальное уравнение является основой математического моделирования.

(Опр. математического моделирования)

Дифференциальным уравнением называется соотношение между функциями и их производными. Если функции одной переменной, то имеем обыкновенные дифференциальные уравнения, если функции нескольких переменных, то дифференциальное уравнение в частных производных.

Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного.

1) Временные процессы, где $y(t)$-характерезует изменение какого-либо параметра во времени. Обычно математическая модель описывает связь между $y(t)$, скоростью $y'(t)$ и ускорением $y''(t)$ процесса в виде:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

2) Пространственные процессы, где y(x) описывает распределение параметра процесса вдоль оси *Ox*:

$$y''(x) = f(x, y(x), y')$$

(Можно привести примеры ☺ если знаешь!)

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех ее производных. Оно имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x), \qquad (1)$$

где $p_i(x)$, $g(x)$ – заданные на некотором интервале (α, β) функции. Если $g(x) \equiv 0$ на этом интервале, то уравнение называется линейным однородным, иначе уравнение называется линейным неоднородным.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных. Чтобы выделить определенное, частное решение уравнения n-го порядка необходимо задать n условий:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

где x_0, y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – некоторые числа. Совокупность этих условий называется начальными условия для дифференциального уравнения (1). Задача Коши для этого уравнения ставится так: найти решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям (2).

Теорема. Если коэффициенты $p_i(x)$ и правая часть $g(x)$ уравнения (1) непрерывны на $[\alpha, \beta]$, то каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ x_0 \in (\alpha, \beta),$$

существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее этим начальным условиям.

Эта теорема является следствием теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка.

Перечислим некоторые свойства линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (3)$$

Теорема 1. Если функция $y = y_0(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения (3), то функция $y = C\,y_0(x)$, где C – произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

Теорема 2. Если функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (3), то их сумма $y = y_1(x) + y_2(x)$ тоже является решением этого уравнения.

Следствие. Линейная комбинация с произвольными коэффициентами

$$y = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_m(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения (3) также является решением этого уравнения.

Для того чтобы записать общее решение уравнения (3) необходимо найти n линейно независимых частных решения этого уравнения.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения).Общим решением на интервале (α, β) линейного однородного дифференциального уравнения (3) с непрерывными на отрезке $[\alpha, \beta]$ коэффициентами, является линейная комбинация

$$y = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

n линейно независимых на интервале (α, β) частных решений $y_i(x)$ этого уравнения (C_1, C_2, …, C_n – постоянные коэффициенты).

Совокупность любых n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется его **фундаментальной системой решений**.

Если $y_1(x)$ … $y_n(x)$ *- частные решения, то они линейно-независимы если* $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \forall x$.

Для того чтобы решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ уравнения (3) составляли фундаментальную систему решений необходимо и достаточно, чтобы **определитель Вронского** этой системы был отличен от нуля

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x).$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Общее решение на интервале (α, β) уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x)$$

с непрерывными на отрезке $[\alpha, \beta]$ коэффициентами и правой частью $g(x)$, равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

Если известно общее решение однородного уравнения $y_{\text{о.о.}}$, то решение неоднородного можно найти методом вариации произвольных постоянных.