8. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость решений. Задача Коши.

Рассмотрим **систему дифференциальных уравнений**, линейную относительно неизвестных функций и их производных

$$
\begin{cases}
\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + f_1(x) \\
\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + f_2(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + f_n(x)
\end{cases} \tag{1}
$$

Такая система называется линейной. Если все $f_i(x)\equiv 0$, то система называется линейной однородной, иначе линейной неоднородной.

Задача Коши для системы (1) формулируется так: найти решение системы (1), удовлетворяющее при $x=x_0$ начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши) Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i=1,2,..,n,$$

функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определены в некоторой области изменения переменных $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Если существует окрестность точки $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, в которой функции f_i непрерывны и имеют ограниченные частные производные по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то найдется интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения x, на котором существует единственное решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

Система линейных уравнений (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, если в рассматриваемой области изменения переменной x, все коэффициенты уравнения $a_{ij}(x)$ и свободные члены $f_i(x)$ непрерывны.

Рассмотрим однородную систему, соответствующую (1)

$$
\begin{cases}
\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) \\
\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x)
\end{cases} \tag{2}
$$

Системы линейных обыкновенных ДУ обладают следующими **свойствами**:

1. Если $y_1^1(x),\ y_2^1(x), \ldots,\ y_n^1(x)$ – решение однородной системы (2), то функции $Cy_1^1(x),\ Cy_2^1(x), \ldots,\ Cy_n^1(x)$, где C – произвольная постоянная, также решение этой системы.

2. Если $y_1^1(x),\ y_2^1(x),\ ...,\ y_n^1(x)$ и $y_1^2(x),\ y_2^2(x),\ ...,\ y_n^2(x)$ – решения однородной системы (2), то их сумма

$y_1^1(x)+y_1^2(x),\ y_2^1(x)+y_2^2(x),\ ...,\ y_n^1(x)+y_n^2(x)$ также является решением этой системы.

Из последнего свойства следует, что сумма любого числа решений однородной системы также будет ее решением.

Данные свойства аналогичны свойствам линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Фундаментальной системой решений системы (1) называется система n ее линейно независимых решений

$$
\begin{array}{l}
y_1^1(x),\ y_2^1(x),\ ...,\ y_n^1(x),\\
y_1^2(x),\ y_2^2(x),\ ...,\ y_n^2(x),\\
..........\ \ ....\ \ ....\ \ ....\\
y_1^n(x),\ y_2^n(x),\ ...,\ y_n^n(x),
\end{array}
$$

(верхний индекс означает номер решения).

Определитель

$$
W(x)=\begin{vmatrix}
y_1^1(x) & y_2^1(x)\ ..... & y_n^1(x)\\
y_1^2(x) & y_2^2(x)\ .... & y_n^2(x)\\
.... & .... & ....\ ...\\
y_1^n(x) & y_2^n(x),\ ... & y_n^n(x)
\end{vmatrix}
$$

называется определителем Вронского.

Теорема. Определитель Вронского W(x) фундаментальной на интервале $a<x<b$ системы решений линейной однородной системы (2) с непрерывными на отрезке [a, b] коэффициентами, отличен от нуля во всех точках интервала (a, b).

Теорема (о структуре общего решения линейной однородной системы). Общим решением линейной однородной системы (2) с непрерывными на отрезке [a, b] коэффициентами является линейная комбинация n линейно независимых на интервале (a, b) решений (фундаментальной системы решений)

$$
\begin{array}{l}
y_1(x)=C_1y_1^1(x)+C_2y_1^2(x)+...+C_ny_1^n(x),\\
y_2(x)=C_1y_2^1(x)+C_2y_2^2(x)+...+C_ny_2^n(x),\\
..........\ \ ....\ \ ....\ \ ....\ \ ....\\
y_n(x)=C_1y_n^1(x)+C_2y_n^2(x)+...+C_ny_n^n(x).
\end{array}
$$

Если известно общее решение однородной системы (2), то для того чтобы записать общее решение неоднородной системы (1), нужно найти ее частное решение.

Теорема (о структуре общего решения линейной неоднородной системы). Общее решение линейной неоднородной системы (1) с непрерывными на отрезке [a, b] коэффициентами и свободными членами равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения неоднородной, т.е.

$$y_{1\text{о.н.}}=y_{1\text{о.о.}}+y_{1\text{ч.н.}},...,\ y_{n\,\text{о.н.}}=y_{n\,\text{о.о.}}+y_{n\,\text{ч.н.}}$$

Устойчивость

Дифференциальные уравнения и их системы, описывающие различные физические явления, являются лишь приближенными. Начальные данные параметры и даже вид уравнения могут несколько изменяться, если учесть ранее отброшенные факторы, или уточнить уже учтенные, или точнее измерить начальные данные, или учесть неизбежно происходящие во время опыта малые изменения параметров уравнений и т.д.

Если такие малые изменения параметров уравнений и начальных данных приводят лишь к малому изменению решения, то мы вправе рассматривать найденные нами решения как приближенно описывающие процесс. Но если при малых изменениях начальных данных начальных данных, решения сильно изменяются, то найденные нами решения не представляют никакой ценности и даже приближенно не описывают явления.

Рассмотрим условия, при выполнении которых при малых изменениях начальных данных решение мало изменяется. В физических задачах независимой переменной часто является время, поэтому рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Решение $y_1^*(t)$, $y_2^*(t)$, …, $y_n^*(t)$ системы уравнений, определенное при $t \geq t_0$, называют устойчивым по Ляпунову, если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, что все решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$ этой системы, удовлетворяющие условию

$$| y_1^*(t_0) - y_1(t_0) | < \delta, \ | y_2^*(t_0) - y_2(t_0) | < \delta, \ \ldots, \ | y_n^*(t_0) - y_n(t_0) | < \delta,$$

определены при $t \geq t_0$ и для них выполнены неравенства

$$| y_1^*(t) - y_1(t) | < \varepsilon, \ | y_2^*(t) - y_2(t) | < \varepsilon, \ \ldots, \ | y_n^*(t) - y_n(t) | < \varepsilon.$$

Решение $y_1^*(t)$, $y_2^*(t)$, …, $y_n^*(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, выполнено условие

$$\lim_{t \to +\infty} \left| y_i^*(t) - y_i(t) \right| = 0, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Это условие означает, что любые решения системы с ростом t неограниченно