РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть имеется нелинейное (скалярное) уравнение

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$. Требуется найти корни этого уравнения.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, (т.е. такое, что $f(\xi) = 0$) называется *корнем уравнения* (1) или *корнем (нулем) функции* $f(x)$.

$f(x)$ – нелинейная функция, может иметь множество корней в рассматриваемом интервале. Будем считать, что уравнение (1) имеет лишь изолированные корни, т. е. для каждого корня уравнения (1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения (1) обычно складывается из двух этапов.

1. **Локализация** или **отделение** корней, т.е. установление возможно тесных промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1);
2. **Вычисление корней с заданной точностью**.

Широко используемые способы отделения корней – графический и табличный – базируются на свойствах гладкости функций; в случае, когда $f(x)$ является полиномом степени n, имеются аналитические подходы.

Для отделения корней полезна известная теорема из математического анализа.

Теорема 1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha,\beta]$, т.е. $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения $f(x)=0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi\in(\alpha,\beta)$ такое, что $f(\xi)=0$.

Если же функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема, и ее производная сохраняет знак внутри интервала (α,β), т.е. $f'(x)>0$ (или $f'(x)<0$) при $\alpha<x<\beta$, то на этом интервале находится только один корень ξ уравнения $f(x)=0$.

Важную роль играют такие свойства алгоритма, как простота, надежность, экономичность и т.д. Одной из характеристик вычислительного алгоритма является *скорость сходимости*.

Определение*:* Последовательность x_n**,** сходящаяся к пределу ξ***,*** имеет скорость **сходимости** порядка α **,** если найдутся такие константы $C>0$, $\alpha\geq 1$, что при $n\to\infty$

$$\left|x_{n+1}-\xi\right|\leq C\left|x_n-\xi\right|^{\alpha} \tag{2}$$

Сходимость при $\alpha=1$ называется *линейной* (в этом случае $C\in(0,1)$) или первого порядка, при $1<\alpha<2$ - *сверхлинейной*, при $\alpha=2$ – *квадратичной* и т. д.

Метод хорд (метод линейной интерполяции)

В этом методе *нелинейная* функция $f(x)$ на отделенном отрезке $[a,b]$ заменяется *линейной,* в качестве которой берется *хорда* – прямая, стягивающая концы нелинейной функции. Эта хорда определяется как прямая, проходящая через точки с координатами $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, т.е. делит отрезок $[a, b]$ *пропорционально величинам ординат* $f(a)$ и $f(b)$.

Имея уравнение хорды $y = cx + d$, можно легко найти точку ее пересечения с горизонтальной осью, подставив в уравнение хорды $y = 0$ и найдя из него x.

Естественно, в полученной таким путем точке x_1 не будет решения, ее принимают за новую границу отрезка, где содержится корень. Выбираем из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ тот, на концах которого функция имеет разные знаки. Через эту точку с координатами $(x_1,\ f(x_1))$ и соответствующую границу предыдущего интервала опять проводят хорду, находят x_2, и т. д. несколько раз, получая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, сходящуюся к корню.

Метод применим только для монотонных функций.
Алгоритм метода зависит от свойств функции $f(x)$.

Если $f(b) f''(b) > 0$, то строящаяся на каждом этапе хорда имеет *правый* фиксированный (закрепленный) конец. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ (обратный случай сводится к первому, если записать уравнение $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет *выпукла* вниз, т. е. расположена ниже своей хорды (см. рис.1).

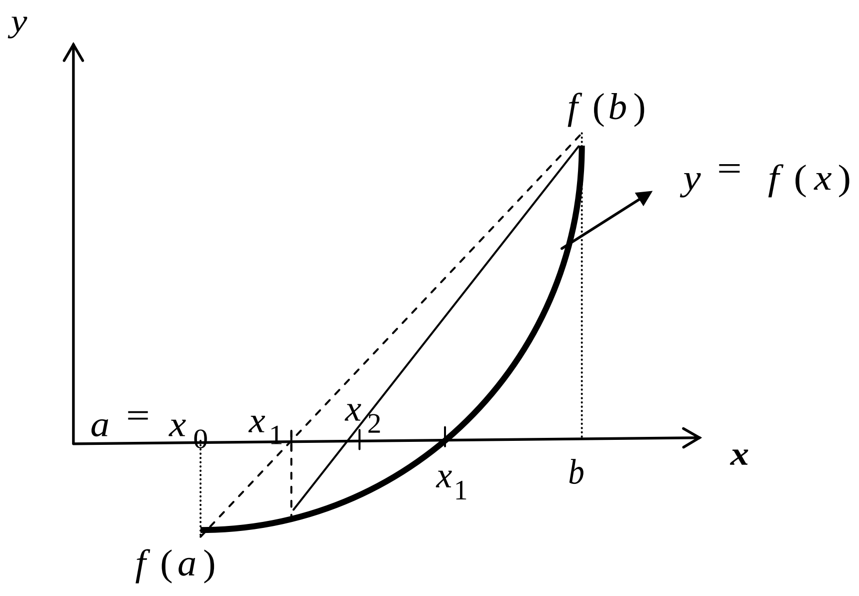

Рис.1

Итак, если $f(b) > 0$, то алгоритм выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Применяя этот прием к тому из отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$**,** на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и т. д. При этом последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, будет приближаться к корню *слева*, (в качестве x_0 можно выбрать начало отрезка точку a).

Если $f(a)f''(a) > 0$, то строящаяся на каждом этапе хорда имеет *левый* фиксированный конец и алгоритм выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}(a - x_n), \quad n - 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

При этом последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots$, будет приближаться к корню *справа* (в качестве x_0 можно выбрать точку b).

Приведем формулу оценки абсолютной погрешности приближенного значения x_n, если известны два последовательных значения x_n и x_{n-1}:

$$\left|\xi - x_n\right| \le \left|x_n - x_{n-1}\right|.$$

Условием прекращения итераций может быть $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$, а в качестве корня принято x_n (можно также окончить процесс и при достижении $\left|f(x_n)\right| \le \varepsilon$). Таким образом, как только будет обнаружено, что $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$, где ε - заданная погрешность, то гарантировано, что $\left|\xi - x_n\right| \le \varepsilon$.

Метод Ньютона (метод касательных)

Одним из лучших общих методов решения уравнения $f(x) = 0$ является метод Ньютона. Пусть корень ξ уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $a \le x \le b$.

Найдя какое-нибудь n - ное приближенное значение корня $x_n \approx \xi$, $(a \le x_n \le b)$, можем уточнить его по методу Ньютона следующим образом. Положим

$$\xi = x_n + \varepsilon_n, \tag{5}$$

где ε_n считаем малой величиной (погрешность на $\boldsymbol{n}$ - ном шаге). Отсюда, применяя формулу Тейлора, получим:

$$0 = f(x_n + \varepsilon_n) \approx f(x_n) + f'(x_n)\varepsilon_n$$

Следовательно $\varepsilon_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Подставив эту поправку в (5), найдем следующее (по порядку) приближение корня

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \quad (n = 0,1,2,\dots). \qquad (6)$$

В качестве начального приближения в зависимости от свойств функции берется

или левый конец интервала (a,b), т.е. $x_0 = a$, (если $f(a)\cdot f''(a) > 0$),

или правый конец интервала (a,b), т.е. $x_0 = b$, (если $f(b)\cdot f''(b) > 0$),

т.е. итерации сходятся к корню с той стороны, с которой

$$f(x)\cdot f''(x) > 0.$$

Геометрически процесс (5.6) означает замену на каждой итерации кривой $y = f(x)$ на касательную в точке $(x_n, f(x_n))$ и определение значения x_{n+1}, как координаты точки пересечения касательной и оси абсцисс (рис.5.2). Точка пересечения касательной с осью абсцисс x_{n+1} принимается за новое приближение. Метод Ньютона часто работает так, как представлено на рис. 2 и приближения быстро сходятся к решению.

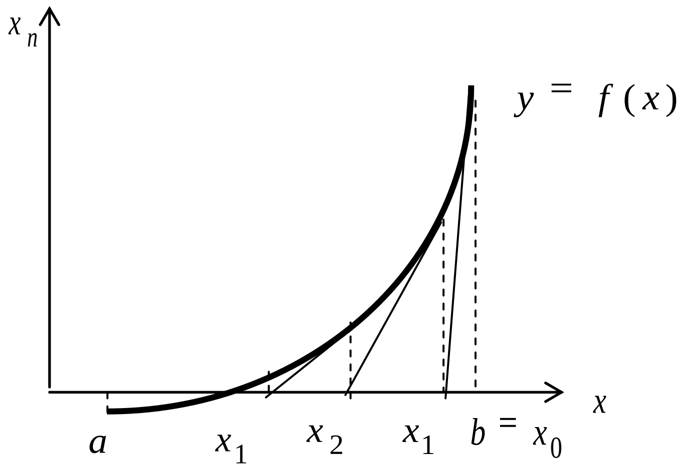

Рис. 2

Метод Ньютона хорош тем, что быстро сходится, точнее, имеет *квадратичную скорость сходимости*.

Доказательство. Пусть $x_n \in [a, b]$ уже известный член последовательности приближений к корню ξ, полученный методом Ньютона. Для любого $x \in [a, b]$ можно записать формальное представление $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + 1/2\, f''(\eta_n)(x - x_n)^2, \tag{7}$$

где $\eta_n \in (x, x_n)$ - некоторая точка между x и x_n.

Если положить $x = \xi$, получим $f(x) = f(\xi) = 0$. Тогда разложение (7) справедливо и для $x = \xi$, т. е. существует точка $\eta_n = \overline{\eta}_n$ такая, что

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + 1/2\, f''(\overline{\eta}_n)(\xi - x_n)^2.$$

Разделим теперь это равенство на $f'(x_n)$ и преобразуем результат:

$$\xi - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \frac{f''(\eta_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2.$$

Согласно формулам итераций Ньютона, левая часть, как раз и есть $\xi - x_{n+1}$.

Если мы определим ошибку на n - ном шаге, как $\varepsilon_n = \xi - x_n$ и $(n+1)$-ом шаге как $\varepsilon_{n+1} = \xi - x_{n+1}$, то получим

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\eta_n)}(\varepsilon_n)^2.$$

Из этого соотношения следует, что метод Ньютона имеет вблизи корня *второй порядок* сходимости: на каждой итерации ошибка меняется пропорционально квадрату ошибки на предыдущей итерации.

Достоинства метода Ньютона состоят в его квадратичной сходимости, возможности обобщения на случай систем уравнений, а также в том, что он является одношаговым.

Однако метод Ньютона не всегда работает так хорошо. Он может и не сходиться, например, если $f'(x_n) = 0$, метод не определен.

Метод простых итераций (задача о неподвижной точке)

Пусть дано уравнение

$f(x) = 0$, где $f(x)$ - непрерывная функция.

Заменим его равносильным уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{8}$$

Итерации образуются по правилу

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

причем задается начальное приближение x_0.

Если полученная последовательность сходящаяся, т.е. существует предел $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (5.9) и предполагая функцию $\varphi(x)$ непрерывной, найдем:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \to \infty} x_{n-1}) \quad \text{или} \quad \to \xi = \varphi(\xi).$$

Таким образом, предел ξ является корнем уравнения (9) и может быть вычислен по формуле (9) с любой степенью точности.

Теорема 2 (о сходимости метода итераций).

Пусть функция $\varphi(x)$ определена, дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a,b]$ и пусть

$$|\varphi'| \le q \tag{10}$$

при $x \in [a,b]$, где $0 \le q < 1$, тогда:

1) процесс итераций $\quad x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,\ldots,$ (11)

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a,b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$.

При этом справедливы оценки погрешности ($\forall\ n \in N$):

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Оценка погрешности приближений

Из формулы (5.12) имеем

$$\left|x_{n+m} - x_n\right| \leq \left|x_{n+m} - x_{n+m-1}\right| + \left|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\right| + \ldots + \left|x_{n+1} - x_n\right| \leq ($$

Устремляя число m к бесконечности и, учитывая, что $\lim_{m \to \infty} x_{n+m} = \xi$, находим окончательно:

$$\left|\xi - x_n\right| \leq \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (5.14)$$

и

$$\left|\xi - x_n\right| \leq \frac{q^n}{1-q}\left|x_1 - x_0\right|.$$

Отсюда ясно, что сходимость процесса итерации будет тем быстрее, чем меньше число q .

Формула (5.14) дает возможность оценить погрешность приближенного значения x_n по расхождению двух последовательных приближений x_n и x_{n-1}.

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \frac{q}{1-q}\varepsilon ,$$

где ε заданная предельная абсолютная погрешность корня ξ и $\left|\varphi'(x)\right| \leq q < 1$. Тогда из (5.14) следует $\left|\xi - x_n\right| \leq \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация метода состоит в следующем: построим на плоскости графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = x$**.** Каждый действительный корень уравнения (5.8) является абсциссой точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$. Возможен вид ломаной – *“лестница"* и *“спираль”* (производная $\varphi'(x) > 0$ и $\varphi'(x) < 0$ соответственно).

Четыре случая взаимного расположения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$ вблизи корня и соответствующие им итерационные процессы представлены на рис. 5.3.

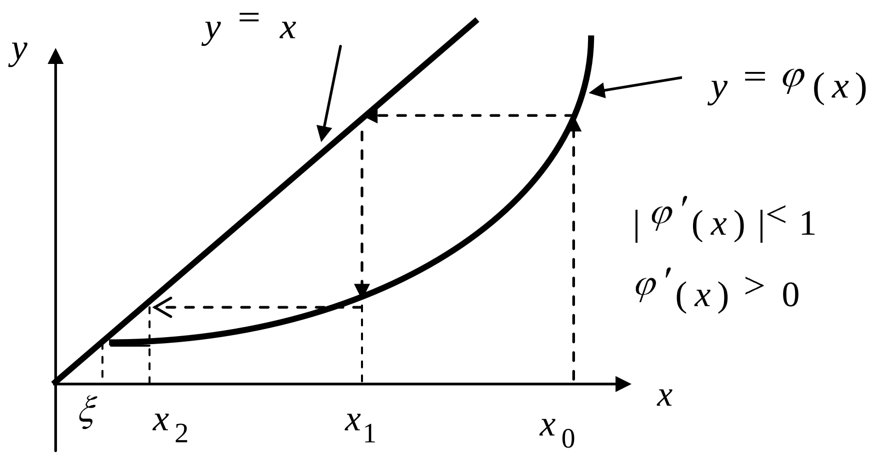

Рис. 5.3а

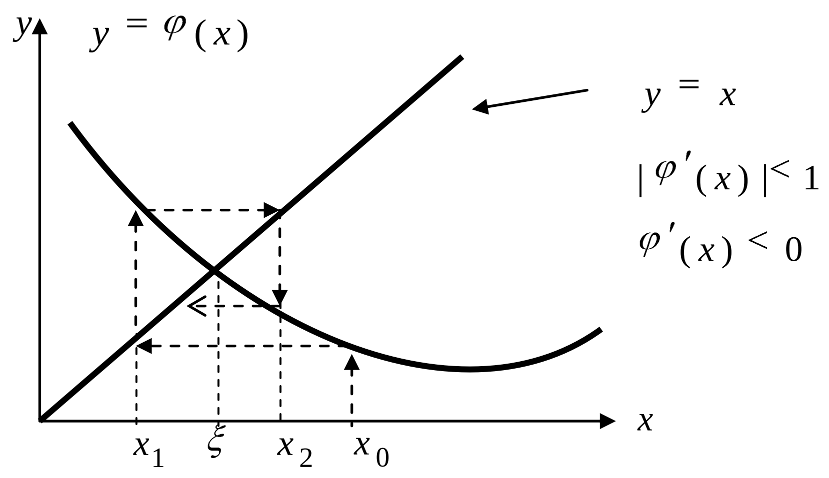

Рис. 5.3 б

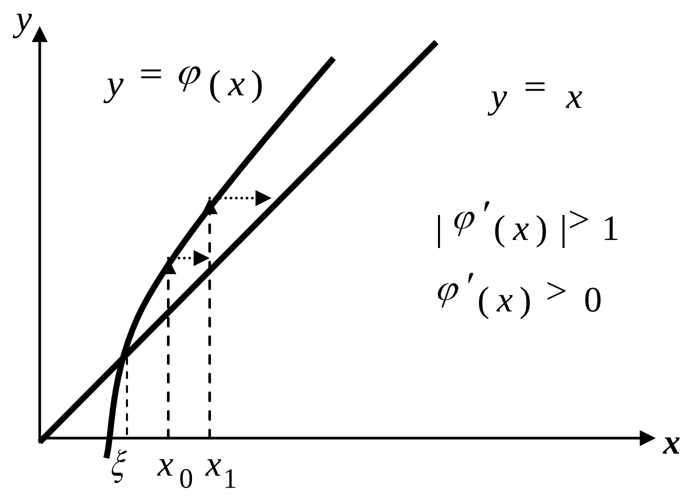

Рис.5.3 в

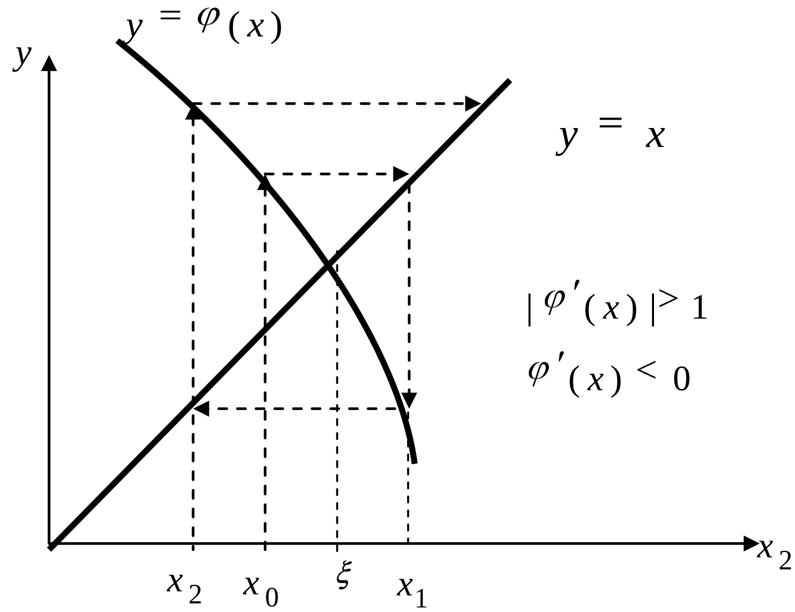

Рис. 5.3 г

Рис.5.3а и рис.5.3б соответствуют случаю $\left|\varphi'(x)\right| < 1$ - процесс итераций сходится. При этом в первом случае $\varphi'(x) > 0$ и сходимость носит односторонний характер («лестница», рис. 5.3а), а во втором случае $\varphi'(x) < 0$ и сходимость носит двусторонний характер («спираль», рис. 5.3б).

Рис. 5.3в и рис. 5.3г соответствуют случаю $\left|\varphi'(x)\right| > 1$ - процесс итераций расходится, при этом имеет место односторонняя и двусторонняя расходимость